MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE-EMPAT KUTTA BERDASARKAN RATA-RATA HERONIAN

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh

ISWANTI
10954006797

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU

PEKANBARU

2013

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT KUTTA BERDASARKAN RATA-RATA HERONIAN

ISWANTI
10954006797

Tanggal Sidang : 01 November 2013
Periode Wisuda : Februari 2014

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode Runge Kutta telah banyak mengalami modifikasi dengan menggunakan pendekatan deret untuk menyelesaikan persamaan diferensial salah satunya adalah deret Heronian. Modifikasi Metode Runge-Kutta bertujuan untuk memperkecil galat. Modifikasi Metode Runge-Kutta orde empat Kutta mempunyai galat orde lima $O(\ )^{5}$. Hasil simulasi numerik dilakukan dalam beberapa kasus dengan membandingkan galat pada Metode Runge-Kutta orde empat Kutta (RKK), Runge-Kutta orde empat Kutta Harmonik (RKKH), Runge-Kutta orde empat Contra Harmonik (RKKCH), Runge-Kutta orde empat Geometri (RKKG) dan Runge-Kutta orde empat Heronian (RKKHe) menunjukkan bahwa Metode Runge-Kutta orde empat Kutta (RKK) lebih baik dibandingkan dengan Metode Runge-Kutta orde empat yang telah dimodifikasi.

Katakunci: *Metode Runge-Kutta Orde Empat Kutta, Rata-rata Heronian*

MODIFIED FOURTH ORDER RUNGE-KUTTA KUTTA BASED ON THE HERONIAN MEAN

ISWANTI
10954006797

Date of Final Exam : 1 November 2013
Graduation Cremony Priod : February 2014

Department of Mathematics
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Runge-Kutta method have many modification experience with series approximation to solve differential equation one which is Heronian series. Runge-Kutta method modification aims to minimize error. Based on result of calculation, we get the of Runge-Kutta four orde Kutta method has an error $O(\ ^{5})$*. Result from simulation of numeric for a few case with comparing error Runge-Kutta method four orde kutta (RKK), Runge-Kutta method four order kutta Harmonik (RKKH), Runge-Kutta method four orde Kutta Contra Harmonik (RKKCH), Runge-Kutta method four orde Kutta Geometri (RKKG), and Runge-Kutta method four orde Kutta Heronian (RKKHe) show compared to better Runge-Kutta four orde Kutta of Runge-Kutta four orde Kutta which have been modified.*

Keywords *: Fourth order Runge-Kutta Kutta Method, Heronian Mean.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin segala puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul "**MODIFIKASI RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT KUTTA BERDASARKAN RATA-RATA HERONIAN"** dengan baik dan selesai tepat pada waktunya. Shalawat serta salam senantiasa kita hadiahkan kepada junjungan alam Nabi Besar Muhammad SAW, semoga dengan senantiasa bershalawat kita mendapatkan syafa'at-Nya dan selalu dalam lindungan Allah SWT. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Srata 1 (S1) di jurusan matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada keluarga tercinta, ayahanda (Raban) dan ibunda (Padem) atas kasih sayang yang tersirat disetiap senyuman semoga Allah SWT selalu merahmati ayah dan ibu, memberikan kebahagian dunia dan akhirat, Amin. Ucapan terimakasih selanjutnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau serta PA penulis yang telah memberikan arahan dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
4. Bapak Wartono, M.Sc selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan arahan, motivasi dan membimbing penulis dengan penuh kesabaran sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

5. Bapak Dr.Rado Yendra, M.Sc selaku Penguji I yang telah membantu memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Ibu Ari Pani Desvina M.Sc selaku Penguji II yang telah membantu memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Semua dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009 yang telah memberi semangat dan memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan penulisan skripsi ini.
9. Semua pihak dan para sahabat yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis sangat menyadari dalam penulisan tugas akhir ini mungkin masih banyak kesalahan dan kekurangan, namun penulis telah berusaha untuk mendapatkan hasil yang maksimal. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak yang sifatnya membangun demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhirnya, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak lain yang memerlukan.

Pekanbaru, 01 November 2013

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah ilmu dasar yang dapat digunakan sebagai alat bantu memecahkan masalah dalam berbagai bidang ilmu seperti: ekonomi, akutansi, astronomi dan geografi. Salah satu permasalahan yang sering dijumpai adalah permasalahan yang dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Suatu persamaan yang didalamnya melibatkan fungsi dan turunan disebut persamaan diferensial. Jika fungsinya terdiri dari satu variabel bebas maka dinamakan persamaan diferensial biasa.

Seringkali persamaan diferensial biasa dimodelkan dalam bentuk yang rumit, sehingga tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik. Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka dapat menggunakan metode numerik sebagai alternatif persoalan metode tersebut.

Beberapa metode perhitungan numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa seperti Euler, Heun, Taylor dan Runge-Kutta adalah contoh dari metode numerik. Metode Runge-Kutta dikenal sebagai metode yang memiliki keakurasian lebih baik dibandingkan dengan ketiga metode tersebut.

Metode Runge-Kutta memiliki banyak bentuk berdasarkan pengambilan parameter bebas diantaranya, Runge-Kutta orde empat Klasik dan Runge-Kutta orde empat Kutta (Lapidus,1991). Metode Runge-Kutta telah banyak mengalami modifikasi dengan tujuan untuk memperkecil kesalahan (*error)* dari metode tersebut sehingga hampirannya lebih mendekati nilai eksaknya. Banyak peneliti yang membahas metode Runge-Kutta dengan menggunakan pendekatan deret, salah satunya adalah deret Heronian yang di kaji oleh Evans (1991). Berdasarkan hasil kajiannya diperoleh bahwa perhitungan Runge-Kutta orde empat klasik berdasarkan rata-rata Heronian lebih akurat dibandingkan rata-rata Kontra harmonik. Ponalagusamy, dkk (2011) melakukan modifikasi Runge-Kutta berdasarkan rata-rata Heronian Orde lima klasik yang menfokuskan penelitiannya pada perhitungan numerik untuk masalah nilai awal pada persamaan diferensial.

Hal tersebutlah yang membuat penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian mengenai metode Runge-Kutta. Sehingga tugas akhir ini penulis beri judul **“Modifikasi Runge-Kutta Orde Empat Kutta Berdasarkan Rata-Rata Heronian”.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka penulis akan mengangkat rumusan masalah pada tugas akhir ini yaitu bagaimana menyelesaikan metode Runge-Kutta orde empat Kutta dengan menggunakan rata-rata Heronian.

1.3 Batasan Masalah

Penulisan tugas akhir ini membatasi pembahasan tentang Runge-Kutta orde empat Kutta dan persamaan diferensial orde satu.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

a Mendapatkan bentuk baru dari metode Runge-Kutta orde empat kutta dengan memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Heronian.

b Memperoleh nilai Galat dari Runge-Kutta orde empat Kutta Heronian menggunakan program Matlab.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian dari tugas akhir ini yaitu menambah wawasan tentang metode Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Heronian.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini disusun atas lima bab, yaitu sebagai berikut:

BAB I **Pendahuluan**

Pada bab ini berisikan latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dari penelitian dan manfaat penelititian.

BAB II **Landasan Teori**

Bab ini berisikan tentang teori-teori yang menunjang untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir diantaranya Persamaan diferensial biasa orde satu, metode Taylor, Metode Runge-Kutta orde empat kutta, rata-rata Heronian dan Galat.

BAB III **Metodologi Penelitian**

Bab ini berisikan tentang studi literatur yang digunakan penulis serta langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari penelitian ini.

BAB IV **Pembahasan**

Bab ini berisi tentang bagaimana langkah-langkah dan hasil dari bentuk modifikasi Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Heronian.

BAB V **Penutup**

Pada bab ini berisikan kesimpulan dari keseluruhan pembahasan dan saran untuk pembaca.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Definisi 2.1 (Richard & Gabriel, 2007): Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari dan turunannya. Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan diferensial biasa jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu variabel bebas. Jika fungsi yang dicari terdiri dari dua atau lebih variabel bebas, persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial parsial.

Bentuk baku persamaan diferensial orde satu dengan nilai awal dapat ditulis sebagai berikut:

$$y' = f(x, y)$$

dengan nilai awal $y\ x_0\ = \ y_o$

sehingga bentuk umumnya dapat ditulis

$$M\ x, y\ dx + N\ x, y\ dy = 0$$

Contoh 2.1:

Diberikan sebuah persamaan diferensial biasa,

$(\cos x \sin x - xy^2)\ dx + \ y\ 1 - x^2\ dy = 0$, dengan nilai awal $y\ 0\ = 2$.

Tentukan solusinya dengan diferensial eksak!

Penyelesaian:

Persamaan yang diberikan adalah eksak, karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

sekarang

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N\ x, y$$

$$= y\ 1 - x^2$$

integralkan $N\ x, y$ terhadap y, sehingga diperoleh:

$$f\ x, y\ = \quad y\ 1 - x^2\ dy$$

$$= \frac{y^2}{2}\ 1 - x^2\ + \square(x)$$

selanjutnya, diferensialkan terhadap x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + g'(x)$$

dan selanjutnya subtitusikan $M\ x, y$ terhadap $\frac{\partial f}{\partial x}$, kemudian selesaikan bentuk $g'(x)$ dengan mengintegralkannya:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M\ x, y$$

$$g'\ x = \cos x \sin x$$

$$g\ x = \quad g'\ x$$

$$= - \quad \cos x \sin x\ dx$$

$$= -\frac{1}{2} cos^2 x + C$$

sehingga diperoleh persamaan umumnya adalah:

$$\frac{y^2}{2}\ 1 - x^2\ - \frac{1}{2} cos^2 x = c_1$$

$$y^2\ 1 - x^2\ - cos^2 x = C \text{ dengan } C = 2c_1$$

oleh karena $y\ 0\ = 2$, maka diperoleh:

$$2^2\ 1 - 0^2\ - cos^2 0 = C$$

$$3 = C$$

sehingga solusi khususnya adalah:

$$y^2\ 1 - x^2\ - cos^2 x = 3$$

2.2 Metode Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret dalam bentuk polinomial, oleh karena bentuknya polinomial yang mudah diturunkan atau diintegralkan maka deret Taylor sering digunakan untuk menghampiri fungsi-fungsi yang rumit.

Teorema 2.1 (Leithold, 1993): Andaikan f adalah suatu fungsi sehingga f dan turunan-turunan ke-n-nya kontinu pada selang tertutup a, b . Selanjutnya, misalkan $f^{\ n+1}(x)$ ada untuk setiap x pada selang terbuka (a, b). Maka terdapat suatu bilangan ξ pada selang terbuka a, b sehingga dapat dibentuk deret Taylor seperti berikut:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (2.1)$$

Bukti:

Jika $n = 0$, maka teorema (2.1) menjadi

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

dengan ξ diantara a dan b merupakan teorema nilai rata-rata Cauchy. Misalkan F dan G adalah fungsi yang didefinisikan oleh

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \cdots$$

$$- \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n \qquad (2.2)$$

dan

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (2.3)$$

Ini mengakibatkan $F(b) = 0$ dan $G(b) = 0$. Selanjutnya diferensialkan persamaan (2.2) maka diperoleh:

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + \frac{2f''(x)(b-x)}{2!}$$

$$- \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} + \frac{3f'''(x)(b-x)^2}{3!} - \frac{f^{(iv)}(x)(b-x)^3}{3!}$$

$$+ \cdots + \frac{(n-1)f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} - \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+ \frac{nf^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}$$

selanjutnya, turunkan persamaan (2.2) dan persamaan (2.3), dengan menyeder hanakan persamaan (2.2), maka diperoleh:

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \qquad (2.4)$$

dan

$$G'(x) = -\frac{1}{n!}(b-x)^n \qquad (2.5)$$

Oleh karena F dan G kontinu pada selang $[a, b]$, dan mempunyai turunan (a, b) dan $G'(x) \neq 0$ untuk setiap x pada (a, b). Sehingga F dan G memenuhi syarat teorema nilai rata-rata Cauchy yaitu :

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

dengan ξ pada (a, b). Karena $F(b) = 0$ dan $G(b) = 0$, maka :

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(a)}{G(a)}$$

atau dapat ditulis :

$$F(a) = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} G(a) \tag{2.6}$$

untuk $\xi \in (a, b)$. Misalkan $x = a$ pada persamaan (2.3), $x = \xi$ pada persamaan (2.4), dan $x = \xi$ pada persamaan (2.5) yang disubtitusikan ke dalam persamaan (2.6) akan menjadi

$$F(a) = -\frac{\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(b-\xi)^n}{n!}}{-\dfrac{1}{n!}(b-\xi)^n} \; \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$F(a) = -\frac{\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(b-\xi)^n}{\cancel{n!}}}{-\dfrac{1}{\cancel{n!}}(b-\xi)^n} \; \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{2.7}$$

jika $x = a$ pada persamaan (2.2), sehingga diperoleh

$$F(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots$$
$$- \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \tag{2.8}$$

Subtitusikan persamaan (2.7) ke dalam persamaan (2.8) maka

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

sehingga Teorema 2.1 terbukti. ■

Berdasarkan persamaan (2.8) jika b diganti x dan $a = x_0$, maka akan diperoleh bentuk deret Taylor berikut:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (2.9)$$

dengan ξ di antara x_0 dan x. Jika turunan f dan n kontinu pada suatu selang tertutup yang memuat x_0 dan x, dan turunan ke $(n+1)$ dari f ada di setiap titik pada selang terbuka yang berkaitan, maka persamaan (2.9) dapat ditulis :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (2.10)$$

dengan

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^n \qquad (2.11)$$

dan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (2.12)$$

dengan ξ di antara x_0 dan x.

Persamaan (2.11) disebut polinomial Taylor orde-n untuk f di sekitar x_0 dan persamaan (2.12) disebut suku sisa atau galat. Selanjutnya, persamaan (2.9) dinamakan persamaan Taylor satu variabel, sedangkan persamaan Taylor untuk dua variabel (x, y) dapat ditulis :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$
$$+ \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + (x - x_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}$$
$$+ \frac{(y - y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(x - x_0)^{n-j}(y - y_0)^j\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-j}\partial y^j} \qquad (2.13)$$

Pandang kembali persamaan diferensial orde satu yang ditulis:

$$\frac{dy}{dx} = f\ x, y\ ,\ y' = f$$

Bentuk turunan persamaan diferensial dalam bentuk f untuk orde-orde yang lebih tinggi dapat ditulis sebagai berikut:

$$P = \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}$$

dengan P adalah operator turunan.

dimana

$$Pf = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y} = f_x + ff_y$$

$$P^2 f = \frac{\partial\ f_x + ff_y}{\partial x} + \frac{\partial\ f_x + ff_y}{\partial y}$$

$$= f_{xx} + f_x f_y + f_{yx} f + f(f_y f_y + f_{yy})$$

sedangkan

$$P^3 f = f_{xxx} + 3ff_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy} +$$
$$4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy}) + f_{xx} f_y + f_y^2$$

Bentuk dari turunan diatas dapat ditulis sebagai berikut:

$$y' = f \quad (2.14)$$

$$y'' = f'$$
$$= f_x + f_y f \quad (2.15)$$

$$y\ 3 = f''$$
$$= f_{xx} + f_{xy} f + f_{yx} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$
$$= f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f \quad (2.16)$$

$$y^{(4)} = f'''$$
$$= f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy} +$$
$$4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_y^2 (f_{x+} ff_y) \quad (2.17)$$

Selanjutnya deret Taylor hampiran y_{n+1} yang diekspansi disekitar y_n dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \ ?y_n' + \frac{h^2}{2!} y_n'' + \frac{h^3}{3!} y_n^{(3)} + \cdots \frac{h^n}{n!} y_n^{(n)} \quad (2.18)$$

sehingga persamaan (2.18) jika disubtitusikan ke dalam persamaan 2.14 sampai persamaan 2.17 didapat bentuk sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2}\left(f_x + f_y f\right) + f_{xx} + \frac{h^3}{6}\left(2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f\right)$$
$$+ \frac{h^4}{24}\left(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy} + 4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_y^2\left(f_x + ff_y\right)\right) + O\left(h^5\right) \quad (2.19)$$

dengan hanya mengambil turunan terhadap variabel y saja pada persamaan (2.19) akan diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2}ff_y + \frac{h^3}{6}\left(f_{yy}f^2 + f_y^2 f\right) + \frac{h^4}{24}\left(3ff_y f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_y^2 ff_y\right) \quad (2.20)$$

2.3 Deret Binomial

Teorema 2.2 (Martono, 1999): Untuk bilangan real *p*, fungsi $f(x) = (1+x)^p$ dapat dinyatakan sebagai deret MacLaurin pada interval (-1,1) yang berbentuk :

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$$

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots, |x| < 1 \quad (2.21)$$

dengan

$$\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!\,(p-n)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!}; n = 0,1,2,\ldots$$

Bukti :

Langkah pertama yaitu tentukan terlebih dahulu jari-jari kekonvergenannya, misalkan

$$u_n = \binom{p}{n} x^n$$

karena

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{p}{n+1} x^{n+1}}{\binom{p}{n} x^n}$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)(p-n)}{(n+1)!}}{\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{p-n}{n+1} = |x| \qquad (2.22)$$

maka berdasarkan uji banding diperoleh bahwa deret pangkatnya konvergen bila $|x| < 1$ dan divergen bila $|x| > 1$. Jadi jari-jari kekonvergenan deret pangkatnya adalah $r = 1$.

Andaikan

$$y = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \cdots, |x| < 1 \qquad (2.23)$$

akan ditunjukkan

$$y = g(x) = f(x) = (1+x)^p$$

dari persamaan (2.23), diperoleh nilai $y(0) = 1$. Karena jari-jari kekonvergenan deret pangkat adalah $r = 1$, berarti fungsi g terdeferensialkan pada selang $(-1,1)$ dengan :

$$y' = g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{p}{n} x^{n-1}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{p}{n} x^n, |x| < 1 \qquad (2.24)$$

dengan mengalikan persamaan (2.24) dengan x ,diperoleh :

$$xy' = xg'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{p}{n} x^{n-1}.x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{p}{n} x^n, |x| < 1$$

Karena deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{p}{n} x^n$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} n \binom{p}{n} x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < 1$, maka kedua deret ini dapat dijumlahkan suku demi suku. Hasilnya adalah :

$$y' + xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{p}{n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{p}{n} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\binom{p}{n+1} + n\binom{p}{n}\right] x^n$$

karena

$$(n+1)\binom{p}{n+1} + n\binom{p}{n} = p\binom{p}{n}$$

maka

$$y' + xy' = p\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = py$$

Jadi diperoleh persamaan diferensial sebagai berikut :

$$(1+x)y' = py, \text{ dengan } y(0) = 1 \quad (2.25)$$

yang dapat diselesaikan dengan metode variabel terpisah, yaitu sebagai berikut :

$$(1+x)y' = py$$

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = py$$

$$\frac{dy}{y} = p\frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y| = p\ln|1+x| + \ln c, c > 0$$

$$= \ln c|1+x|^p$$

$$|y| = c|1+x|^p, c > 0 \rightarrow y = c(1+x)^p, c \neq 0$$

karena $y(0) = 1$, maka $1 = c(1+0)^p$, sehingga $c = 1$. Sehingga solusi untuk persamaan (2.25) adalah :

$$y = (1+x)^p$$

dengan demikian terbukti bahwa :

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots, |x| < 1 \ \blacksquare$$

Contoh 2.2:

Tentukanlah ekspansi binomial dari $f(x) = (1+x)^{1/2}$.

Penyelesaian :

Dari $f(x) = (1+x)^{1/2}$, diperoleh :

$$f'\ x = \frac{1}{2}\ (1+x)^{-1/2}$$

$$f''\ x = \frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\ (1+x)^{-3/2}$$

$$f'''\ x = \frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad -\frac{3}{2}\ (1+x)^{-5/2}$$

$$f^{(4)}\ x = \frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad -\frac{3}{2}\quad -\frac{5}{2}\ (1+x)^{-5/2}$$

Untuk $x = 0$, maka :

$$f'\ 0 = \frac{1}{2}$$

$$f''\ 0 = \frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}$$

$$f'''\ 0 = \frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad -\frac{3}{2}$$

$$f^{(4)}\ 0 = \frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad -\frac{3}{2}\quad -\frac{5}{2}$$

Sehingga diperoleh deret binomial sebagai berikut :

$$1+x\ ^{1/2} = 1 + \ 1/2\ x + \frac{1/2\ \ -1/2\ x^2}{2!} + \frac{1/2\ \ -1/2\ \ -3/2\ x^3}{3!} + \frac{1/2\ \ -1/2\ \ -3/2\ \ -5/2\ x^4}{4!} + \cdots$$

$$1+x\ ^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \qquad (2.26)$$

2.4 Metode Runge Kutta Orde Empat

Metode Runge Kutta adalah alternative lain dari deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan, dalam metode Runge-Kutta berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang tinggi sekaligus menghindarkan pencarian turunan yang lebih tinggi.

Metode Runge-Kutta mempunyai tiga sifat utama yaitu:

1. Metodenya satu langkah yaitu untuk mencapai titik y_{n+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu x_n, y_n.
2. Mendekati ketelitian deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.

3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$, tetapi hanya memerlukan fungsi dari itu sendiri.

Bentuk umum Runge-kutta orde n ialah:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 + \cdots + w_i k_i \qquad (2.27)$$

dengan

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21}\, k_1)$$
$$k_3 = h f(x_n + c_3 h, y_n + a_{31}\, k_1 + a_{32}\, k_2)$$
$$\ldots$$
$$k_n = h f(x_n + c_{n-1} h, y_n + a_{n-1,1}\, k_1 + a_{n-1,2}\, k_1 + \cdots + a_{n-1,n-1}\, k_{n-1})$$

Metode Runge-Kutta dengan n langkah dapat ditunjukkan ke dalam sebuah tabel, yang dikenal dengan nama tabel Butcher. Berikut adalah bentuk umum tabel Butcher dari metode Runge-Kutta orde n.

Tabel 2.1 Runge-Kutta Orde n dalam Tabel Butcher

0	0	0	0	...	0
c_2	a_{21}	0	0	...	0
c_3	a_{31}	a_{32}	0	...	0
...	...	...	...	...	...
c_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	0
	w_1	w_2	w_3	...	w_i

Metode Runge-Kutta orde empat diperoleh dengan mengambil $n = 4$, yang dapat ditulis:

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4) \qquad (2.28)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21}\, k_1)$$
$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + a_{31}\, k_1 + a_{32}\, k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + c_4 h,\ y_n + a_{41}\,k_1 + a_{42}\,k_2 + a_{a43}\,k_3)$$

Persamaan Runge-Kutta di atas memiliki tiga belas konstanta yaitu: $w_1, w_2, w_3, w_4, c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}$ dan a_{43}. Selanjutnya akan dijabarkan k_1, k_2, k_3 dan k_4 ke dalam deret Taylor maka diperoleh

$$k_1 = f \tag{2.29}$$

$$k_2 = f\ y_n + a_{21}k_1$$

$$= f + h a_{21} f f_y + \frac{h^2}{2} a_{21}^2 f^2 f_{yy} + \frac{h^3}{6} a_{21}^3 f^3 f_{yyy} + \cdots \tag{2.30}$$

$$k_3 = f\ y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2$$

$$= f + h(a_{31} + a_{32}) f f_y + h^2\ \ a_{31}a_{32} f^2 f_y + \frac{1}{2}(a_{31} + a_{32})^2 f^2 f_{yy}$$

$$+ h^3\ \ \frac{1}{2} a_{31}^2 a_{32} f^2 f_y f_{yy} + a_{31}(a_{31} + a_{32}) a_{32} f^2 f_y f_{yy} +$$

$$\frac{1}{6}(a_{31} + a_{32})^3 \quad f_{yyy} + \cdots \tag{2.31}$$

$$k_4 = f\ y_n + a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3$$

$$= f + h(a_{41} + a_{42} + a_{43}) f f_y + h^2\ \ a_{31}a_{42} f f_y^2 + (a_{31} + a_{32}) a_{43} f f_y^2$$

$$+ \frac{1}{2}(a_{41} + a_{42} + a_{43})^2 f^2 f_{yy} + h^3\ \ \frac{1}{2} a_{31}^2 a_{42}(a_{41} + a_{42} +$$

$$a_{43}) f^2 f_y f_{yy} + a_{43} \frac{(a_{31} + a_{32})^2}{2} f^2 f_y f_{yy} + (a_{41} + a_{42} +$$

$$a_{43})\ \ a_{31}a_{42} + a_{43}\ \ a_{31} + a_{32}\ \ \ f^2 f_y f_{yy} + a_{43}a_{42}a_{41} f^3 f_y +$$

$$\frac{1}{6}(a_{41} + a_{42} + a_{43})^3 f^3 f_{yyy} \ + \cdots \tag{2.32}$$

Untuk mendapatkan nilai parameter $w_1, w_2, w_3, w_4, c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}$, a_{42} dan a_{43} oleh karena $a_{31} + a_{32} = c_3$ dan $a_{41} + a_{42} + a_{43} = c_4$ pada persamaan 2.28 sampai persamaan (2.31) sehingga diperoleh:

$$k_1 = f \tag{2.33}$$

$$k_2 = f\ y_n + a_{21}k_1$$

$$= f + h a_{21} f f_y + \frac{h^2}{2} a_{21}^2 f^2 f_{yy} + \frac{h^3}{6} a_{21}^3 f^3 f_{yyy} + \cdots \tag{2.34}$$

$$k_3 = f\ y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2$$

$$= f + h c_3 f f_y + h^2\ \ a_{31}a_{32} f^2 f_y + \frac{1}{2} c_3{}^2 f^2 f_{yy}$$

$$+ h^3 \left(\frac{1}{2}a_{31}^2 a_{32} f^2 f_y f_{yy} + c_3 a_{31} a_{32} f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{6} c_3{}^3 \quad f_{yyy}\right)$$

$$+ \cdots \tag{2.35}$$

$$k_4 = f\left(y_n + a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right)$$

$$= f + hc_4 f f_y + h^2\left(a_{31}a_{42} f f_y^2 + c_3 a_{43} f f_y^2 + \frac{1}{2} c_4{}^2 f^2 f_{yy}\right)$$

$$+ h^3\left(\frac{1}{2}a_{31}^2 a_{42} c_4 f^2 f_y f_{yy} + a_{43}\frac{c_3{}^2}{2} f^2 f_y f_{yy} + c_4\left(a_{31}a_{42} + \right.\right.$$

$$\left.\left. a_{43}c_3\right) f^2 f_y f_{yy} + a_{43}a_{42}a_{31} f^3 f_y + \frac{1}{6} c_4{}^3 f^3 f_{yyy}\right) + \cdots \tag{2.36}$$

Selanjutnya subtitusikan persamaan (2.33) sampai persamaan (2.36) ke dalam deret Taylor untuk mendapatkan parameter tersebut sehingga diperoleh:

$$a_{21} = c_2$$

$$a_{31} + a_{32} = c_3$$

$$a_{42} + a_{42} + a_{43} = c_4$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$$

$$w_2 a_{21} + w_3 c_3 + w_4 c_4 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 a_{21}^2 + w_3 c_3{}^2 + w_4 c_4{}^2 = \frac{1}{3}$$

$$w_2 a_{21}^3 + w_3 c_3{}^3 + w_4 c_4{}^3 = \frac{1}{4}$$

$$w_3 a_{31} a_{21} + w_4 a_{42} a_{21} + w_4 a_{43} c_3 = \frac{1}{6}$$

$$w_3 a_{31} a_{21}^2 + w_4 a_{42} a_{21}^2 + w_4 a_{43} c_3{}^2 = \frac{1}{12}$$

$$w_3 a_{21} a_{32} c_3 + w_4 c_4 (a_{21} a_{42} + a_{43} c_3) = \frac{1}{8}$$

$$w_4 a_{43} a_{32} a_{21} = \frac{1}{24} \tag{2.37}$$

Persamaan (2.37) terdiri dari 8 persamaan dengan 10 parameter, kemudian diambil tiga parameter bebas

$$a_{21} = \frac{2}{3}, c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = 1 \tag{2.38}$$

subtitusikan tiga parameter tersebut kedalam persamaan 2.37 sehingga diperoleh:

$$a_{21} = \frac{2}{3},\ a_{31} = \frac{1}{12},\ a_{32} = \frac{1}{4},\ a_{41} = \frac{-5}{4},\ a_{42} = \frac{1}{4},\ a_{43} = 2$$

$$w_1 = \frac{1}{8},\ w_2 = \frac{3}{8},\ w_3 = \frac{3}{8},\ w_4 = \frac{1}{8} \qquad (2.39)$$

Kemudian subtitusikan persamaan 2.38 dan (2.39) pada persamaan 2.28 , sehingga diperoleh rumus metode Runge-Kutta Orde empat Kutta sebagai berikut:

$$y_{n+1=}y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \qquad (2.40)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2k_1}{3})$$

$$k_3 = hf\ \ x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{k_1}{12} + \frac{k_2}{4}$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n - \frac{5k_1}{4} + \frac{k_2}{4} + 2\,k_3)$$

sehingga Runge-Kutta orde empat Kutta dapat dituliskan ke dalam bentuk tabel Butcher berikut:

Tabel 2.2 Runge-Kutta Orde 4 dalam Tabel Butcher

0	0	0	0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{-5}{4}$	$\frac{1}{4}$	2	0
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{8}$

2.4 Galat Pemotongan

Galat pemotongan adalah galat yang ditimbulkan oleh pembatasan jumlah komputasi yang digunakan pada proses metode numerik. Banyak metode dalam metode numerik yang penurunan rumusnya menggunakan proses iterasi yang jumlahnya tak terhingga, sehingga untuk membatasi proses penghitungan jumlah iterasi dibatasi sampai langkah ke *n*. Hasil penghitungan sampai langkah ke *n* akan menjadi hasil hampiran dan nilai penghitungan langkah *n* keatas akan menjadi galat pemotongan.

Pada aproksimasi polinomial di titik $n+1$ data, terdapat perbedaan atau galat terhadap nilai sesungguhnya atau nilai eksak. Nilai perbedaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan galat pemotongan. Dengan mensubtitusikan sebuah derajat polinomial $p + 1$ kedalam rumus orde p dapat dibangun sebuah bentuk *error* :

$$T(x, h) = Ch^{p+1}y^{(p+1)}(\varepsilon)$$

Aplikasi Algoritma dan proses perhitungan dari bentuk x_0 ke $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ dalam pengertian yang luas dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum di tulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h), \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

dengan Φ adalah fungsi naik yang terdapat unsur x_n, y_n dan menggunakan h. Definisikan $y(x)$ sebagai solusi eksak untuk persamaan differensial biasa, sehingga untuk setiap x akan berlaku :

$$T(x, h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x + h)$$

atau,

$$Galat\ Pemotongan = Nilai\ Sebenarnya - Nilai\ Hampiran \qquad (2.40)$$

2.6 Rata-rata heronian

Dalam matematika, yang dimaksud rata-rata Heronian adalah rata-rata yang merupakan gabungan dari rata-rata Aritmatik dan rata-rata Geometri. Rumus dari rata-rata Heronian yaitu:

$$He = \frac{2AM + GM}{3} \qquad (2.42)$$

sebagaimana diketahui rumus dari rata-rata Aritmatik adalah $AM = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$

maka $AM = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{N}$

$$AM = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{N}$$

sehingga

$$AM = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{2.43}$$

dan rata-rata Geometri dengan urutan $x_i \,{}_{i=1}^{n}$ didefenisikan oleh

$$GM\ x_1, \dots, x_n \ = \ \prod_{n=1}^{N} x_n \ {}^{1}\ {}_{N} \tag{2.44}$$

dengan demikian:

$$GM\ x_1, x_2 \ = \ \overline{x_1 x_2}$$

$$GM\ x_1, x_2, x_3 \ = \ (x_1 x_2 x_3)^{1\ 3}$$

dan seterusnya, sehingga rumus rata-rata Heronian dapat ditulis sebagai berikut :

$$HeM = \frac{x_n + x_{n+1} + \ \overline{x_n x_{n+1}}}{3}$$

atau

$$HeM = \frac{1}{3}(x_n + x_{n+1} + \ \overline{x_n x_{n+1}}) \tag{2.45}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi pustaka dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan pokok permasalahan. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Memperkenalkan bentuk metode Runge-Kutta orde empat Kutta (RKK), yaitu:

$$y_{n+1}=y_n + \frac{}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{3.1}$$

2. Langkah selanjutnya substitusikan Persamaan (2.40) $He = \frac{2AM+Gm}{3}$ kedalam Persamaan (3.1)$y_{n+1}=y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$ sehingga menghasilkan bentuk Persamaan baru yang disebut sebagai Runge-Kutta Kutta heronian (RKKHe).
3. Setelah didapat bentuk umum dari RKKHe, kemudian mengekspansikan k_1, k_2, k_3, dan k_4 ke dalam deret Taylor.
4. Selanjutnya menentukan nilai parameter dengan cara menstubtitusikan Persamaan-Persamaan yang didapat ke dalam Persamaan RKKHe menggunakan Maple 13.
5. Kemudian subtitusikan nilai parameter yang didapat pada Persamaan awal dari RKKHe sehingga diperoleh rumus RKKHe orde empat.
6. Selanjutnya aplikasikan RKKHe ke dalam contoh soal dengan menggunakan program Matlab 5.3 untuk memperoleh nilai galatnya.

BAB IV

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas tentang pembentukan parameter dari metode Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Heronian, yang dinamakan RKKHe. Hasil pembahasan yang dilakukan secara teoritis akan ditunjukkan dengan hasil simulasi numerik yang akan membandingkan metode RKKHe dengan bentuk Runge-Kutta Kutta yang telah dimodifikasi.

4.1 Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kutta Berdasarkan Rata-rata Heronian

Metode Runge-Kutta orde empat Kutta telah banyak dimodifikasi, seperti modifikasi metode Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata Aritmatik, rata-rata Geometrik, rata-rata Harmonik dan rata-rata Heronian.

Perhatikan kembali bentuk umum dari metode Runge-Kutta orde empat Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{4.1}$$

Berdasarkan persamaan 4.1 dapat dibentuk persamaan baru yang mengandung unsur rata-rata Aritmatik sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \; \frac{k_1}{2} + \frac{3k_2}{2} + \frac{3k_3}{2} + \frac{k_4}{2}$$

atau

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \; \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2} \tag{4.2}$$

Persamaan (4.2) merupakan bentuk metode Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Aritmatik. Bila rata-rata Aritmatik yaitu $\frac{k_n+k_{n+1}}{2}$ diganti dengan rata-rata Heronian yaitu

$$\frac{2AM+GM}{2} = \frac{1}{3}(k_n + k_{n+1} + \sqrt{k_n k_{n+1}}$$

diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\square}{4} \cdot \frac{1}{3} \quad k_1 + k_2 + 2(k_2 + k_3 \; + k_3 + k_4 + \quad \overline{k_1 k_2}$$

$$+ 2 \quad \overline{k_2 k_3} \quad + \quad \overline{k_3 k_4})$$

dapat disederhanakan menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\square}{12} \quad k_1 + k_2 + 2(k_2 + k_3 \; + k_3 + k_4 + \quad \overline{k_1 k_2}$$

$$+ 2 \quad \overline{k_2 k_3} \quad + \quad \overline{k_3 k_4}) \tag{4.3}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 \square,\ y_n + a_{21}\, k_1 \square)$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 \square,\ y_n + a_{31}\, k_1 + a_{32}\, k_2 \square)$$

$$k_4 = f(x_n + c_4 \square,\ y_n + a_{41}\, k_1 + a_{a42}\, k_2 + a_{a43}\, k_3 \square) \tag{4.4}$$

Persamaan (4.3) dinamakan modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Heronian (RKKHe). Untuk mendapatkan rumusan yang dicari, ditentukan terlebih dahulu nilai $a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}$. Dengan menjabarkan persamaan (4.4) menggunakan deret Taylor, maka diperoleh nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 seperti pada persamaan (2.29) sampai persamaan (2.32).

Langkah selanjutnya adalah dengan menstubtitusikan nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 yang telah diperoleh pada persamaan (2.29)sampai persamaan (2.32) ke persamaan (4.3). Sedangkan untuk menghindari adanya polinomial dalam bentuk tanda akar, digunakan ekspansi deret binomial sampai suku x^4sebagai berikut :

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

Langkah awal nyatakan $\overline{k_i k_{i+1}}$ ke dalam bentuk deret Binomial $(1 + x)^{1/2}$, dengan memisalkan:

$$x = \frac{k_i k_{i+1}}{f^2} - 1; i = 1,2,3 \tag{4.5}$$

untuk nilai $i = 1$

diperoleh $x = \frac{k_1 k_2}{f^2} - 1.$

Kemudian subtitusikan nilai k_1 dan k_2 yang diperoleh dari persamaan (2.29) dan persamaan (2.30) ke dalam persamaan 4.5 . Langkah selanjutnya, dengan menstubtitusikan nilai x pada persamaan (4.5) ke dalam deret Binomial maka akan diperoleh $\overline{k_1 k_2}$ dalam bentuk polinomial berikut ini :

$$\begin{aligned}
\overline{k_1 k_2} = f &+ h \frac{a_{21} f f_y}{2} + h^2 \frac{a_{21}^2 \; 2f^2 f_{yy} - f f_y^2}{8} \\
&+ h^3 \frac{a_{21}^3 \; 4f^3 f_{yyy} - 6f^2 f_y f_{yy} - 3f f_y^3}{48} \\
&+ h^4 \frac{a_{21}^4 f^3 f_y f_{yyy}}{24} - \frac{a_{21}^4 f^3 f_{yy}^2}{32} + \frac{3a_{21}^4 f^2 f_y^2 f_{yy}}{32} \\
&- \frac{5a_{21}^4 f f_y^4}{128}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dengan cara yang sama, untuk $i = 2$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
\overline{k_2 k_3} = f &+ h \frac{(a_{21} + c_3) f f_y}{2} \\
&+ h^2 \frac{(a_{21}^2 + c_3{}^2) f^2 f_{yy}}{4} - \frac{21c_3{}^2 + 21a_{21}^2 \; f f_y^2}{128} + \frac{54a_{21} a_{32} f f_y^2}{64} \\
&+ h^3 \frac{(a_{21}^3 + c_3{}^3) f^3 f_{yyy}}{12} + \frac{(a_{21}^3 + c_3{}^3) f f_y^3}{16} \\
&+ h^4 \frac{a_{21}^4 f^2 f_y{}^2 f_{yy}}{32} - \frac{7a_{21}^4 f^3 f_y f_{yyy}}{128} - \frac{21a_{32}^4 f^3 f_{yy}^2}{512} - \frac{21a_{32}^4 f^3 f_{yy}^2}{512} \\
&- \frac{21a_{32}^4 f^3 f_{yy}^2}{512} + \cdots
\end{aligned} \tag{4.7}$$

selanjutnya untuk $i = 3$ diperoleh :

$$\overline{k_3 k_4} = f + h \frac{c_3 f f_y}{2} + \frac{c_4 f f_y}{2}$$

$$+ h^2 \left(-\frac{c_3{}^2 f f_y^2}{8} - \frac{c_4{}^2 f f_y^2}{8} + \frac{3a_{32}a_{43} f f_y^2}{4} + \frac{a_{32}a_{43} f^2 f_{yy}}{2} + \frac{a_{32}a_{43} f^2 f_{yy}}{2} \right.$$

$$\left. + \frac{a_{42}a_{43} f^2 f_{yy}}{2} + \cdots \right)$$

$$+ h^3 \left(\frac{a_{31}^3 f f_y^3}{16} + \frac{a_{32}^3 f f_y^3}{16} + \frac{3a_{31}^3 a_{32} f f_y^3}{16} + \frac{3a_{31}^3 a_{32} f f_y^3}{16} + \frac{a_{31}^3 f f_y^3}{16} \right.$$

$$\left. + \frac{a_{32}^3 f f_y^3}{16} + \frac{c_3{}^3 f^3 f_{yyy}}{12} + \frac{c_4{}^3 f^3 f_{yyy}}{12} + \cdots \right)$$

$$+ h^4 \left(-\frac{c_3{}^4 f f_y^4}{128} - \frac{c_4{}^4 f f_y^4}{128} + \cdots \right) \qquad (4.8)$$

Kemudian subtitusikan nilai-nilai pada ruas kanan $\overline{k_1 k_2}$, $\overline{k_2 k_3}$ dan $\overline{k_3 k_4}$ yang telah diperoleh pada persamaan (4.6), (4.7) dan (4.8) ke dalam persamaan (4.3), sehingga persamaan (4.3) berubah menjadi

$$y_{n+1} = y_n + hf + h^2 \left(\frac{3a_{21} + 3c_3 + c_4}{8} \right) f f_y$$

$$+ h^3 \left(\left(\frac{3c_3{}^2 + 3a_{21}^2 + c_4{}^2}{32} \right) f^2 f_{yy} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a_{42}a_{21} + a_{43}c_3 + 3a_{32}a_{21}}{8} + \frac{c_3 a_{21}}{24} + \frac{c_3 c_4}{48} + \frac{c_4{}^2}{96} \right) f f_y^2 \right)$$

$$+ h^4 \left(\left(\frac{3a_{21}{}^3}{16} + \frac{3c_3{}^3 + 10369 c_4{}^3}{72} \right) f^3 f_{yyy} + \left(\frac{a_{43}a_{32}a_{21} + a_{21}{}^2 a_{32}}{8} \right. \right.$$

$$- \frac{c_3 a_{32} a_{21}}{16} + \frac{a_{21}{}^2}{24} - \frac{a_{42}a_{21}c_3 + c_4 a_{32} a_{21} - a_{42}a_{21}c_4 + c_4 c_3 a_{43}}{48}$$

$$\left. + \frac{a_{21}{}^3 + c_3{}^3}{64} - \frac{c_3{}^2 a_{21} - a_{21}{}^2 c_3}{96} - \frac{c_4{}^2 c_3 + c_3{}^2 c_4 + c_4{}^3}{192} \right) f f_y^3$$

$$+ \left(\frac{a_{42}a_{21}c_4 + a_{43}c_3c_4 + 3a_{32}a_{21}c_3}{8} + \frac{a_{21}{}^2 a_{32} + c_3{}^2 a_{43} + a_{42}a_{21}{}^2}{16} \right.$$

$$\left. \left. + -\frac{a_{21}{}^3}{32} + \frac{a_{21}{}^2 c_3 + c_3{}^2 a_{21}}{48} + \frac{c_3{}^2 c_4 - c_3{}^3 - c_4{}^3}{96} \right) f^2 f_y f_{yy} \right) \qquad (4.9)$$

Persamaan (4.9) inilah yang nantinya akan dibandingkan dengan ekspansi y_{n+1} di sekitar x_n dengan menggunakan deret Taylor satu variabel pada persamaan (2.20) seperti berikut :

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6}(f_{yy} f^2 + f_y^2 f) + \frac{h^4}{24}(3f^2 f_y f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_y^3 f)$$

Selanjutnya dengan membandingkan koefisien-koefisien h^n pada Persamaan (4.9) dengan persamaan (2.20) maka diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$h^2 f f_y : \frac{3a_{21} + 3c_3 + c_4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$h^3 f f_y^2 : \frac{a_{42}a_{21} + a_{43}c_3 + 3a_{32}a_{21}}{8} + \frac{c_3 a_{21}}{24} - \frac{3a_{21}^2 + {c_3}^2}{32} + \frac{c_3 c_4}{48} - \frac{{c_4}^2}{96} = \frac{1}{6}$$

$$h^3 f^2 f_{yy} : \frac{3{c_3}^2 + 3a_{21}^2 + {c_4}^2}{16} = \frac{1}{6}$$

$$h^4 f^3 f_{yyy} : \frac{3{c_3}^3 + 3a_{21}^3}{16} + \frac{{c_4}^3}{48} = \frac{1}{24}$$

$$h^4 f^2 f_y f_{yy} : \frac{a_{42}a_{21}c_4 + a_{43}c_3c_4 + 3a_{32}a_{21}c_3}{8} + \frac{3{a_{21}}^2 a_{32} + {c_3}^2 a_{43} + a_{42}{a_{21}}^2}{16} - \frac{{c_3}^3 + {a_{21}}^3}{32} + \frac{{a_{21}}^2 c_3 + {c_3}^2 a_{21}}{48} + \frac{{c_3}^2 c_4 - {c_4}^2 c_3 - {c_4}^3}{96} = \frac{1}{24}$$

$$h^4 f f_y^3 : \frac{a_{43}a_{32}a_{21}}{8} - \frac{a_{32}a_{21}c_3}{16} + \frac{a_{32}a_{21}^2}{24} + \frac{a_{43}{c_3}^2 - c_4 a_{43} c_3 - a_{42}a_{21}c_4}{48} + \frac{a_{32}a_{21}c_4 + a_{42}a_{21}c_3}{48} + \frac{{a_{21}}^3 + {c_3}^3}{64} - \frac{{c_3}^2 a_{21} + {a_{21}}^2 c_3}{96} - \frac{{c_3}^2 c_4 + {c_4}^2 c_3 - {c_4}^3}{192} = \frac{1}{24}$$

Untuk mendapatkan nilai parameternya, dilakukan penyederhanaan terlebih dahulu dengan mengambil nilai:

$c_3 = 2/3$ dan $c_4 = 1$

maka di dapatkan Persamaan sebagai berikut :

$$\square^2 f f_y : \frac{3a_{21}}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\square^3 f f_y^2 : \frac{a_{42}a_{21} + 3a_{32}a_{21}}{8} + \frac{a_{43}}{24} - \frac{{a_{21}}^2}{24} + \frac{a_{21}}{72} = \frac{25}{144}$$

$$\square^3 f^2 f_{yy} : \frac{3a_{21}^2}{16} = \frac{1}{12}$$

$$\square^4 f^3 f_{yyy} : \frac{{a_{21}}^3}{16} = \frac{1}{54}$$

$$\square^4 f^2 f_y f_{yy} : \frac{a_{32}a_{21} + a_{42}a_{21}}{8} + \frac{3{a_{21}}^2 a_{32} + a_{42}{a_{21}}^2}{16} - \frac{{a_{21}}^3}{32} + \frac{{a_{21}}^2 + 7a_{43}}{144}$$
$$\frac{a_{21}}{432} = \frac{7}{144}$$

$$\square^4 f f_y^3 : \frac{a_{43}a_{32}a_{21}}{8} - \frac{{a_{21}}^2}{288} - \frac{a_{43}}{216} - \frac{a_{42}a_{21}}{72}$$
$$+ \frac{{a_{21}}^3}{64} - \frac{a_{21}}{864} = \frac{11}{288} \tag{4.10}$$

Kemudian subtitusikan nilai $a_{21} = 2/3$ ke dalam persamaan (4.10) sehingga akan didapatkan persamaan baru sebagai berikut :

$$\frac{a_{32}}{8} + \frac{a_{42}}{24} + \frac{a_{43}}{12} = \frac{37}{216}$$
$$\frac{a_{43}a_{32}}{24} - \frac{a_{42}}{432} - \frac{a_{43}}{216} - \frac{a_{32}}{432} = \frac{17}{432}$$
$$\frac{5a_{32}}{48} + \frac{7a_{42}}{144} + \frac{a_{43}}{9} = \frac{5}{108} \tag{4.11}$$

dengan menyelesaikan sistem persamaan pada persamaan 4.11 , maka didapatlah nilai parameternya yaitu sebagai berikut:

$$a_{21} = \frac{1}{3}$$
$$a_{31} = -\frac{125}{108} - \frac{\sqrt{43369}}{108}$$
$$a_{32} = \frac{197}{108} + \frac{\sqrt{43369}}{108}$$
$$a_{41} = -\frac{29}{9} + \frac{\sqrt{43369}}{18}$$

$$a_{42} = \frac{353}{36} - \frac{\sqrt{43369}}{12}$$

$$a_{43} = -\frac{67}{12} + \frac{\sqrt{43369}}{36} \qquad (4.12)$$

langkah terakhir yaitu mensubtitusikan semua nilai parameter yang telah didapat pada persamaan (4.12) kedalam persamaan (4.3), maka diperoleh modifikasi metode Runge Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Heronian berikut ini

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(k_1 + k_2 + 2(k_2 + k_3 + k_3 + k_4 + \sqrt{k_1k_2}\right.$$
$$\left. + 2\sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4})\right)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n\right.$$
$$\left. + h\left(\left(-\frac{125}{108} - \frac{\sqrt{43369}}{108}\right)k_1 + \left(\frac{197}{108} + \frac{\sqrt{43369}}{108}\right)k_2\right)\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + h\left(\left(-\frac{29}{9} + \frac{\sqrt{43369}}{18}\right)k_1 + \left(\frac{353}{36} - \frac{\sqrt{43369}}{12}\right)k_2\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{67}{12} + \frac{\sqrt{43369}}{36}\right)k_3\right)\right) \qquad (4.13)$$

4.2 Galat Metode Runge-Kutta Orde Empat Kutta Berdasarkan Rata-rata Heronian

Galat dari metode Runge Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Heronian diperoleh dengan menggunakan langkah-langkah yang sama untuk menentukan nilai parameter dalam mendapatkan rumusan metode Runge Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Heronian yang telah dibahas dalam sub bab 4.1 sebelumnya.

Nilai parameter $a_{21}, a_{31,} a_{32}, a_{41}, a_{42}$ dan a_{43} yang telah disubstitusikan ke dalam persamaan (4.4) akan menghasilkan nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 pada persamaan (4.13). Nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 inilah yang kemudian diekspansikan kedalam deret Taylor sampai h^5, maka diperoleh galat metode Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Heronian sebagai berikut :

$$\text{Galat} = \frac{23}{3456} f^4 f_{yyyy} + \left(\frac{1103}{15552} - \frac{\sqrt{43369}}{1728}\right) f^2 f_{yy}^2$$

$$- \left(\frac{6709}{139968} - \frac{5\sqrt{43369}}{17496}\right) f f_y^4 + \left(\frac{2267}{139968} - \frac{37\sqrt{43369}}{139968}\right) f^3 f_y f_{yyy}$$

$$+ \left(\frac{67}{12} + \sqrt{43369} \times \frac{37\sqrt{43369}}{139968}\right) f^2 f_y^2 f_{yy} + O(h^6) \qquad (4.14)$$

4.3 Simulasi Numerik

Berdasarkan rumusan yang telah diperoleh pada persamaan (4.12) atau disebut juga RKKHe akan dilakukan perbandingan komputasi. RKKHe akan dibandingkan dengan Runge-Kutta orde empat Kutta, Runge-Kutta orde empat Kutta Geometri (Roni), Runge-Kutta orde empat Kutta Harmonik (Ardianti, E.P), Runge-Kutta orde empat Kutta Contra Harmonik (Supinah) diterapkan pada tiga Contoh soal persamaan diferensial berikut :

Contoh 4.1:

Diberikan persamaan diferensial:

$$y' = y - x^2 + 1 \qquad\qquad y(0) = 0.5$$

dengan solusi eksak $Y = (x + 1)^2 - 0.5e^x$ pada interval $[0, 2]$ dengan $n = 15$

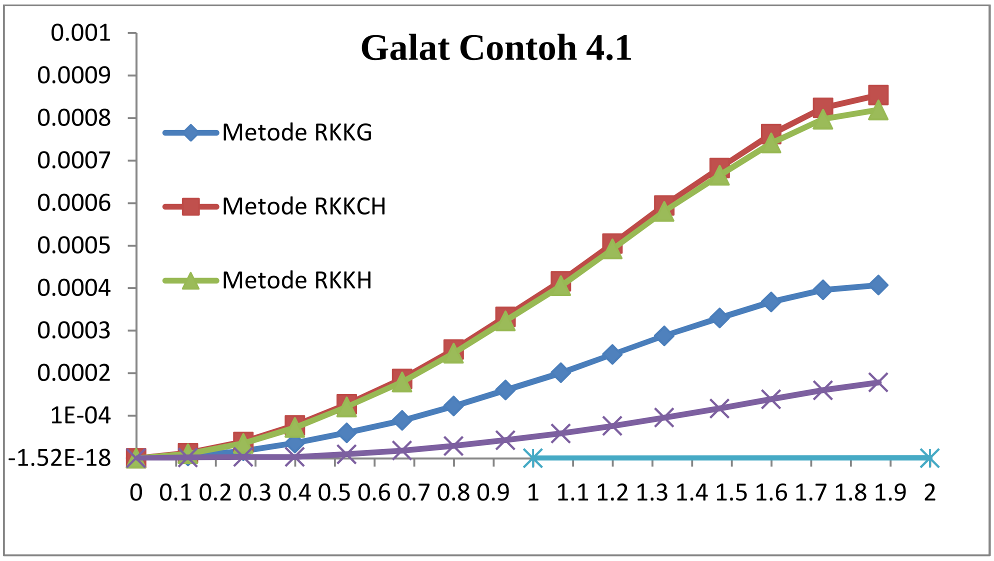
Penyelesaian:

Secara manual, proses penyelesaian kelima metode tersebut membutuhkan waktu yang lama dan ketelitian yang tinggi apabila partisi diambil dalam jumlah banyak. Berikut ini diberikan hasil eksak dan galat yang terjadi pada setiap modifikasi metode Runge-Kutta Kutta secara komputasi numerik dengan menggunakan aplikasi Matlab5.3. Hasil eksak dan galat diperlihatkan pada Tabel berikut ini:

Tabel 4.1 Solusi Eksak dan *Error* dari Metode RKK, RKKG, RKKH, RKKCH untuk Persamaan $Y = (x + 1)^2 - 0.5e^x$

i	X	Y (solusi eksak)	Error				
			Metode RKK	Metode RKKG	Metode RKKCH	Metode RKKH	Metode RKKHe
1	0,00	0,500000	0,00000000	0,000000000	0,000000E+0	0,000000E+0	0,000000E+0
2	0,13	0,713129	4,057162E-07	5,102927E-06	1,238558E-05	1,029084E-05	1,967784E-06
3	0,27	0,951641	8,436890E-07	1,735384E-05	3,880567E-05	3,502354E-05	2,897396E-06
4	0,40	1,214087	1,314866E-06	3,581809E-05	7,748345E-05	7,230495E-05	2,881655E-06
5	0,53	1,498808	1,819810E-06	5,984583E-05	1,271927E-04	1,208166E-04	9,185276E-06
6	0,67	1,803910	2,358568E-06	8,891961E-05	1,869635E-04	1,795065E-04	1,791448E-05
7	0,80	2,127229	2,930512E-06	1,225450E-04	2,558719E-04	2,473684E-04	2,901678E-05
8	0,93	2,466291	3,534150E-06	1,601554E-04	3,328556E-04	3,232483E-04	4,244305E-05
9	1,07	2,818272	4,166887E-06	2,010119E-04	4,165210E-04	4,056425E-04	5,813410E-05
10	1,20	3,179941	4,824744E-06	2,440815E-04	5,049085E-04	4,924507E-04	7,596038E-05
11	1,33	3,547610	5,502015E-06	2,878743E-04	5,951779E-04	5,806462E-04	9,567702E-05
12	1,47	3,917063	6,190853E-06	3,302099E-04	6,831587E-04	6,658034E-04	1,168467E-04
13	1,60	4,283483	6,880783E-06	3,678654E-04	7,626707E-04	7,413851E-04	1,386846E-04
14	1,73	4,641367	7,558099E-06	3,960166E-04	8,244485E-04	7,976113E-04	1,599117E-04
15	1,87	4,984425	8,205172E-06	4,072982E-04	8,543333E-04	8,195578E-04	1,783430E-04

Berdasarkan Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa solusi metode RKKHe mendekati solusi eksak, hal ini ditunjukkan dengan galat yang dihasilkan oleh metode RKKHe lebih kecil dibandingkan dengan RKKG, RKKCH dan RKKH. Sedangkan jika RKKHe dibandingkan dengan RKK maka galat RKKHe lebih besar. Lebih jelasnya ditunjukkan dalam Gambar berikut:



Gambar 4.1 Grafik Galat untuk Contoh 4.1

Contoh 4.2:

Diberikan persamaan diferensial:

$$y' = y \qquad\qquad y(0) = 1$$

dengan solusi eksak $Y = \exp(x)$ pada interval $[0, 1]$ dengan *n* = 10 .

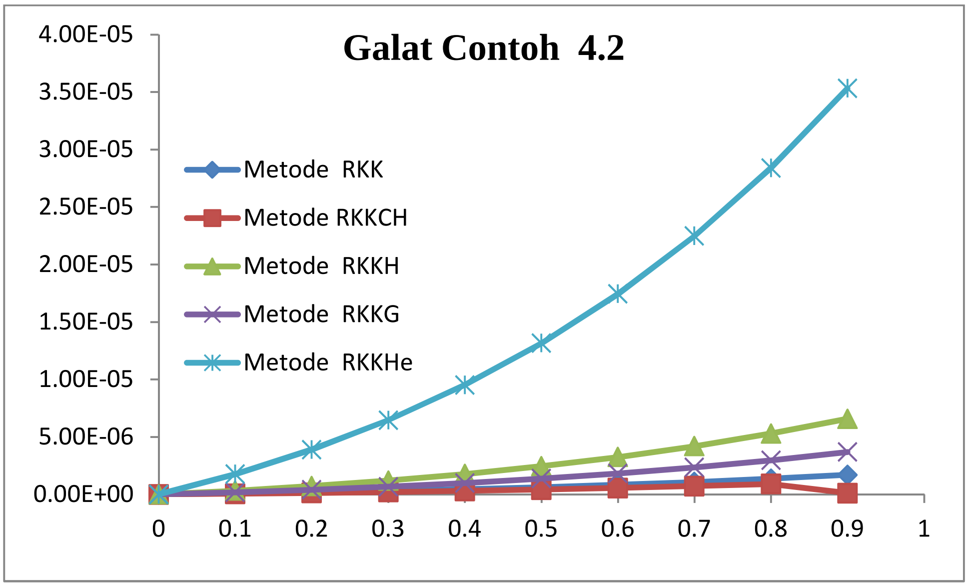
Penyelesaian:

Perhitungan secara manual untuk kelima metode Runge Kutta tersebut membutuhkan waktu yang lama serta membutuhkan tingkat ketelitian tinggi apabila partisi yang diambil dalam jumlah banyak. Berikut ini diberikan hasil eksak dan galat yang terjadi pada setiap metode Runge Kutta secara komputasi numerik dengan menggunakan software Matlab 5.3. Hasil eksak dan galat disetiap metode diperlihatkan pada tabel berikut:

Tabel 4.2 Solusi Eksak dan *Error* dari Metode RKK, RKKG, RKKCH, RKKH dan RKKHe untuk Persamaan $Y = \exp(x)$

n	x	Y (Nilai Eksak)	*Error*				
			Metode RKK	Metode RKKCH	Metode RKKH	Metode RKKG	Metode RKKHe
1	0,00	1,000000	0,0000000E+00	0,000000E+1	0,000000E+1	0,0000000E+0	0,0000000000
2	0,10	1,105170	8,4742314E-08	5,665900E-08	3,282138E-07	1,8417123E-07	1,7631797E-06
3	0,20	1,221402	1,8730947E-07	1,252357E-07	7,254647E-07	4,0708134E-07	3,8972269E-06
4	0,30	1,349858	3,1051346E-07	2,076104E-07	1,202643E-06	6,7484163E-07	6,4606476E-06
5	0,40	1,491824	4,5756058E-07	3,059266E-07	1,772168E-06	9,9442038E-07	9,5201522E-06
6	0,50	1,648721	6,3210329E-07	4,226265E-07	2,448188E-06	1,3737554E-06	1,3151733E-05
7	0,60	1,822118	8,3829857E-07	5,604895E-07	3,246796E-06	1,8218813E-06	1,7441882E-05
8	0,70	2,013752	1,0808737E-06	7,226761E-07	4,186308E-06	2,3490718E-06	2,2488953E-05
9	0,80	2,225540	1,3652001E-06	9,127779E-07	5,287526E-06	2,9670007E-06	2,8404705E-05
10	0,90	2,459603	1,6973768E-06	1,134872E-07	6,574072E-06	3,6889230E-06	3,5316033E-05

Berdasarkan Tabel 4.2 galat yang dihasilkan oleh metode RKKHe lebih besar dibandingkan dengan Metode RKK, RKKG, RKKH maupun RKKCH. Sehingga, pada contoh 4.2 galat yang dihasilkan tidak sebagus pada galat di contoh 4.1. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada grafik berikut:



Gambar 4.2 Grafik Galat untuk Contoh 4.2

Contoh 4.3:

Diberikan persamaan diferensial:

$$y' = y - x \qquad\qquad y(0) = 2$$

dengan solusi eksak $Y = \exp(x) + x + 1$ pada interval $[0, 1]$ dengan $n = 10$

Penyelesaian:

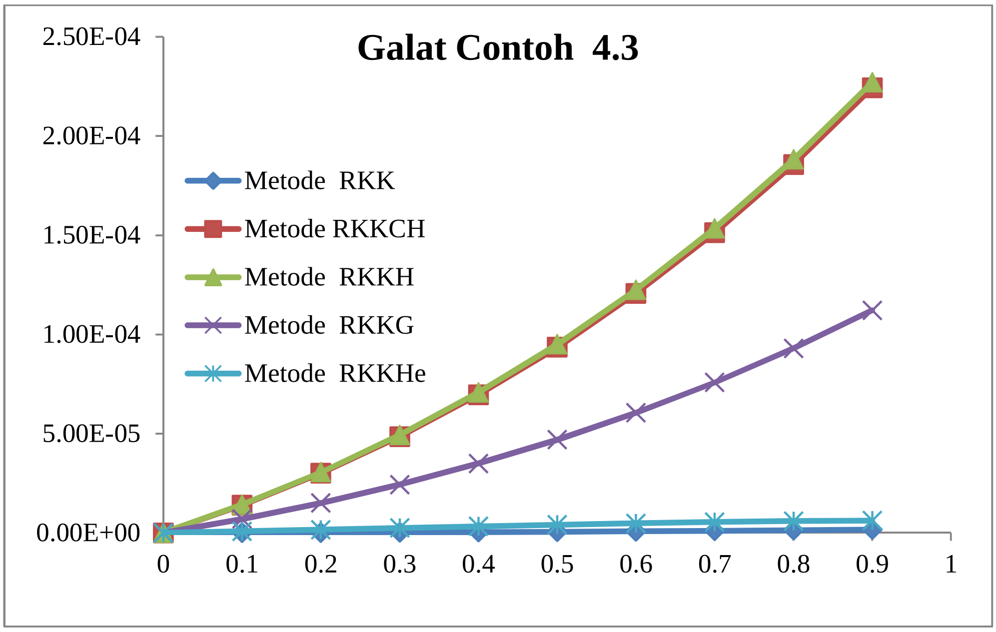
Persamaan di atas diselesaikan dengan menggunakan Matlab5.3 secara metode Runge-Kutta Kutta (RKK), Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata Geometri (RKKG), Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik (RKKCH, Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata Harmonik (RKKH) dan Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata Heronian (RKKHe), dengan ⍰ = *0.1*, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 2$. Solusi eksak dan *error* dari persamaan diatas disajikan dalam Tabel berikut ini:

Tabel 4.3 Solusi Eksak dan *Error* dari Metode RKK, RKKG dan RKKHem untuk Persamaan $y' = y - x$

n	x	Y (Nilai Eksak)	*Error*				
			Metode RKK	Metode RKKCH	Metode RKKH	Metode RKKG	Metode RKKHe
1	0,00	2,000000	0,0000000E+00	0,000000E+1	0,000000E+1	0,000000E+0	0,0000000000
2	0,10	2,205170	8,4742314E-08	1,396931E-05	1,421364E-05	7,027749E-06	8,210101E-07
3	0,20	2,421402	1,8730947E-07	3,008445E-05	3,059523E-05	1,512620E-05	1,668907E-06
4	0,30	2,649858	3,1051346E-07	4,856541E-05	4,936391E-05	2,440334E-05	2,526103E-06

5	0,40	2,891824	4,5756058E-07	6,965201E-05	7,075803E-05	3,497657E-05	3,370500E-06
6	0,50	3,148721	6,3210329E-07	9,360607E-05	9,503739E-05	4,697383E-05	4,174838E-06
7	0,60	3,422118	8,3829857E-07	1,207139E-04	1,224856E-04	6,053476E-05	4,905944E-06
8	0,70	3,713752	1,0808737E-06	1,512895E-04	1,534134E-04	7,581203E-05	5,523903E-06
9	0,80	4,025540	1,3652001E-06	1,856771E-04	1,881593E-04	9,297285E-05	5,981107E-06
10	0,90	4,359603	1,6973768E-06	2,242551E-04	2,270976E-04	1,122006E-04	6,221189E-06

Tabel 4.3 menunjukkan bahwa solusi metode RKKHe mendekati solusi eksak, hal ini ditunjukkan dengan galat yang dihasilkan oleh metode RKKHe lebih kecil dibandingkan dengan RKKG, RKKCH dan RKKH. Sedangkan jika dibandingkan dengan RKK maka galat RKKHe lebih besar. Lebih jelasnya ditunjukkan pada Gambar 4.3 berikut:



Gambar 4.3 Grafik Galat untuk Contoh 4.3

Berdasarkan contoh 4.1 dan 4.3 galat yang dihasilkan oleh Metode RKKHe lebih kecil dibandingkan galat yang dihasilkan oleh metode RKKG, RKKH dan RKKCH, ini berarti solusi yang dihasilkan oleh metode RKKHe lebih mendekati solusi eksak dibandingkan metode RKKG, RKKH dan RKKCh. Namun galat metode RKKHe lebih besar jika dibandingkan dengan galat metode RKK.

Pada contoh 4.2 perbedaan galat metode RKKHe dengan metode RKK, RKKG, RKKH, dan RKKCH sangat besar. Hal ini menunjukkan bahwa RKKHe ini tidak berfungsi maksimal dalam menghitung $\overline{k_i k_{i+1}}$. Ini juga menunjukkan bahwa metode RKKHe ternyata terbatas untuk beberapa contoh tertentu. Sehingga dapat disimpulkan bahwa RKK yang belum dimodifikasi lebih baik dibandingkan Runge-Kutta yang sudah dimodifikasi.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Metode Runge-Kutta orde empat Kutta memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8} \; k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4$$

setelah dilakukan modifikasi dengan menggunakan rata-rata heronian diperoleh :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} \;\; k_1 + k_2 + 2(k_2 + k_3 \; + k_3 + k_4 + \;\; \overline{k_1 k_2}$$

$$+ 2 \;\; \overline{k_2 k_3} \; + \;\; \overline{k_3 k_4})$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f \;\; x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3} k_1$$

$$k_3 = f \;\; x_n + \frac{2h}{3}, y_n$$

$$+ h \;\; -\frac{125}{108} - \frac{\sqrt{43369}}{108} \;\; k_1 + \;\; \frac{197}{108} + \frac{\sqrt{43369}}{108} \;\; k_2$$

$$k_4 = f \;\; x_n + h, y_n + h \;\; -\frac{29}{9} + \frac{\sqrt{43369}}{18} \;\; k_1 + \;\; \frac{353}{36} - \frac{\sqrt{43369}}{12} \;\; k_2$$

$$+ \;\; \frac{67}{12} + \frac{\sqrt{43369}}{36} \;\; k_3$$

Galat dari metode Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata heronian diperoleh:

$$\text{Galat} = \frac{23}{3456} f^4 f_{yyyy} + \;\; \frac{1103}{15552} - \frac{\sqrt{43369}}{1728} \;\; f^2 f_{yy}^2$$

$$- \quad \frac{6709}{139968} - \frac{5\sqrt{43369}}{17496} \quad f f_y^4 + \quad \frac{2267}{139968} - \frac{37\sqrt{43369}}{139968} \quad f^3 f_y f_{yyy}$$

$$+ \quad \frac{67}{12} + \sqrt{43369} \times \frac{37\sqrt{43369}}{139968} \quad f^2 f_y^2 f_{yy} + O(\square^6)$$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde empat Kutta, Runge-Kutta orde empat Kutta Geometri, Runge-Kutta orde empat Kutta Harmonik , Runge-Kutta orde empat Kutta Kontra Harmonik dan Runge-Kutta orde empat Kutta Heronian pada beberapa persoalan persamaan diferensial orde satu diperoleh, bahwa metode Runge-Kutta Kutta memiliki *error* yang lebih kecil dibandingkan dengan metode Runge-Kutta Kutta yang telah dimodifikasi.

5.2 Saran

Penulisan tugas akhir ini penulis hanya menggunakan rata-rata Heronian untuk memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kutta, dan dalam komputasinya hanya membandingkan lima metode. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar pembaca dapat lebih lanjut menemukan bentuk baru dengan menggunakan rata-rata yang lainnya seperti centroidal.

DAFTAR PUSTAKA

Ardianti, E.P. *2011*. "Modifikasi Metode runge-Kutta orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Harmonik". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau..*

Butcher, J.C. 2008. *Numerical methods for ordinarry Differential Equetion*. John Wiley& Sons: England.

Bronson, R.G. 2007. *Persamaan Diferensial*, edisi tiga. Erlangga: Jakarta.

Evan D. J. A. 1995. Fourth Order Runge-Kutta Method Based On The Heronian Mean Formula, *Loughborough University Of Technology*. Vol. 58, pp. 103-115.

Kincaid, David. 2008. *Numerical Mathematics and Computing* ,sixth edition. Thomson brooks/cole: United state of America.2008

Lapidus, dkk. 1971.*Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. halaman 39-42. Academic Press: New York and London.

Lambert, J.D. 1807. *Numerical Methods For Ordinarry Differential System,*Wiley Publisher: New York. 1807.

Leithold, dkk. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik. e*disi kelima. Erlangga. Jakarta. 1993

Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*, edisi revisi. Informatika: Bandung.

Martono, K. *Kalkulus*. Erlangga: Bandung. 1999.

Ponalagusamy, dkk, New Algoritm Of Fifth- Order Heronian Mean Runge- Kutta Method, *National Institute of Technology*. pp 67- 72.

Ponalagusamy, dkk, 2011.M New Development of New Fifth- Order Fifth-Stage Runge Kutta Method based On Heronian Mean *National Institute of Technology*. Vol.2, pp 162- 197.

Roni. *2011*. "Modifikasi Metode runge-Kutta orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Geometri". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau..*

Supinah. 2010."Modifikasi Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Kontraharmonik". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*.

Srivastava.*2012*. Numerical Accuracy of Runge-Kutta Fourth Order Method, *L.K.P.G. College* .